جامعة البعث   الامتحان الفصلي الأول 2017- 2016   المدة : ساعة ونصف

كلية العلوم _ قسم الرياضيات   بنى جبرية (٣)   الدرجة: 100

السؤال الأول (20) درجة:

أثبت أن المجموعة المعرفة بالشكل: $U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} : a , b \in R\right\}$

تؤلف مودولاً جزئياً في المودول $M_2(R)$ على الحلقة الواحدية R .

السؤال الثاني (25) درجة :

ليكن المودول $M = {}_R M$ وليكن U مودولاً جزئياً فيه، والمطلوب:

١) أثبت أن U أعظمي إذا وفقط إذا تحقق الشرط: $\forall m \in M : m \notin U \Rightarrow Rm + U = M$.

٢) إذا كان R حقلاً فأثبت أن M عديم الفتل.

٣) إذا كان M منتهي البعد ، فبين إن كان هذا المودول نيوثرياً أم أرتينياً ؟

السؤال الثالث (25) درجة :

ليكن $f \in Hom_R(M, N)$ وليكن V مودولاً جزئياً في المودول N ، والمطلوب:

١) أثبت أن المتتالية $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ تامة إذا وفقط إذا كان f إيزومورفيزماً.

٢) أثبت أن: $f(f^{-1}(U)) = V \cap im f$ ، واستنتج أنه إذا كان f غامراً فإن: $f(f^{-1}(U)) = V$.

السؤال الرابع (30) درجة :

ليكن المودول M على الحلقة الواحدية R ، ولنفرض أن M يمكن أن يتولد بـ s عنصراً من عناصره وليكن U مودولاً جزئياً في M . والمطلوب:

١) أثبت أن M / U يمكن أن يتولد بـ s عنصراً من عناصره.

٢) إذا كان $M = U \oplus V$ ، فأثبت أن V يمكن أن يتولد بـ s عنصراً من عناصره.

٣) إذا كان M نصف بسيط فأثبت أن U مجموع مودولات بسيطة.

د.ياسين خلوف

٨ / ٢ / ٢٠١٧

الأصيليات ٢
د. ... (5) الأول

سلم تصحيح مقرر جبر (٢)
الفصل الأول ٢٠١٦ - ٢٠١٧

السؤال الأول (20)

$\cdot \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in U \Rightarrow U\neq\phi$; $\forall A,B\in U: A=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}a'&b'\\-b'&a'\end{pmatrix}$

$\cdot\ A-B=\begin{pmatrix}a-a'&b-b'\\-b+b'&a-a'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-a'&b-b'\\-(b-b')&a-a'\end{pmatrix}\in U$ حيث: $b-b'$ و $a-a'\in R$

$\cdot\ \forall\alpha\in R;\ \alpha A=\alpha\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a&\alpha b\\-\alpha b&\alpha a\end{pmatrix}\in U;\ \alpha a,\alpha b\in R$

السؤال الثاني (25)

1) $(\Leftarrow)$ إذا كان U أعظمياً في M فيوجد $m\in M$ و $m\notin U$، وعندئذ $U\subsetneq Rm+U\subseteq M$ وبسبب أعظمية U يكون $Rm+U=M$.

$(\Rightarrow)$ نفرض $U\subsetneq V\subseteq M$ فيوجد $m\in V$ و $m\notin U$ ومحقق الشرط يكون $Rm+U=M$، ومن جهة ثانية $Rm\subseteq V$ لأن $m\in V$ ولأن $U\subseteq V$ فيكون $Rm+U\subseteq V$. إذاً نحصل على أن:

$M=Rm+U\subseteq V\subseteq M\Rightarrow V=M$

إذن U أعظمي في M عند تحقق الشرط.

2) إذا كان R حقلاً، و $0\neq r\in R$ فيوجد $r^{-1}\in R$، وعندئذ $\forall m\in M$ نجد:

$rm=0\Rightarrow r^{-1}(rm)=0\Rightarrow(r^{-1}r)m=0\Rightarrow 1.m=0\Rightarrow m=0$

أي عنصر الفتل الوحيد في M هو الصفر فهو عديم الفتل.

3) إذا كان M منتهي البعد وكانت $\{x_1,\dots,x_n\}$ قاعدة لـ M، فعندئذ:

$0\subsetneq Rx_1\subsetneq Rx_1+Rx_2\subsetneq\cdots\subsetneq\sum_{i=1}^{n-1}Rx_i\subsetneq\sum_{i=1}^{n}Rx_i=M$

$M=\sum_{i=1}^{n}Rx_i\supsetneq\sum_{i=1}^{n-1}Rx_i\supsetneq\cdots\supsetneq Rx_1+Rx_2\supsetneq Rx_1\supsetneq 0$

ولأن أي متوالية جزئية ستكون من شكل أحد هاتين السلسلتين، فنلاحظ أن الأولى تتقطع من الأعلى والثانية من الأسفل، وبذلك M نيوثري وأرتيني.

السؤال الثالث (25)

1) $0\to M\xrightarrow{f}N\to 0$ تامة إذا وفقط إذا كانت كل من المتتاليتين $0\to M\xrightarrow{f}N$ و $M\xrightarrow{f}N\to 0$ تامة، أي إذا وفقط إذا كان f مونومورفيزم وإبيمورفيزم أي $M\cong N$ و f ايزومورفيزم.

1) إذاً $f(f^{-1}(V)) \subseteq \operatorname{im} f$ و $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ وإذن $f(f^{-1}(V)) \subseteq V \cap \operatorname{im} f$.

$\forall y \in \operatorname{im} f \cap V \Rightarrow \exists x \in M : f(x) = y \; ; \; y \in V \Rightarrow x \in f^{-1}(V) \Rightarrow$
$y = f(x) \in f(f^{-1}(V)) \Rightarrow V \cap \operatorname{im} f \subseteq f(f^{-1}(V))$

من الاحتواءين نستنتج المساواة. إذا كان f غامراً فإنّ $\operatorname{im} f = N$ و $V \subseteq N$
ومنه $V \cap \operatorname{im} f = V$ ومنه $f(f^{-1}(V)) = V$.

السؤال الرابع (30)

1) نفرض أن $\{m_1, \dots, m_s\}$ مجموعة مولّدة لـ M ، ومنه $\forall m \in M$ توجد عناصر $r_i \in R$ بحيث

$$m = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i \Rightarrow m + U = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i m_i\right) + U = \sum_{i=1}^{n} r_i (m_i + U)$$

وحيث أنّ $m_i + U \in M/U$ و $r_i \in R$ فإن العنصر $m+U \in M/U$ ، هو تركيب خطي للعناصر $m_i + U$ التي عددها s . وإذن مجموعة العناصر $\{m_1+U, \dots, m_s+U\}$ مجموعة مولّدة لـ M/U .

2) إذا كان $M = U \oplus V$ ، فإنّ

$$M/U = U+V/U \cong V/U \cap V \cong V/0 \cong V$$

أي أنّ V إيزومورف مع M/U وحيث M/U يتولد بـ s عنصر من عناصره فإن V الإيزومورف معه يتولد بـ s عنصر من عناصره.

3) نفرض $U_0 = \sum_{M_i \subseteq U} M_i$ (M_i بسيط) (مجموع المودولات البسيطة المحتواة في U). إنّ $U_0 \subseteq U \subseteq M$ ولأنّ M نصف بسيط فإنّ U_0 هو جمعاً مباشراً في M ومنه يوجد $N \subseteq M$ بحيث $M = U_0 \oplus N$ ، وعندئذٍ يكون:

$$U = M \cap U = (U_0 \oplus N) \cap U = (U_0 \cap U) \oplus (N \cap U) = U_0 \oplus (N \cap U)$$

أ) إذا كان $0 = N \cap U$ فإن $U = U_0$ وعندئذٍ U مجموع مودولات بسيطة.

ب) كان $0 \neq N \cap U$ فيحوي مودولاً جزئياً بسيطاً مثل B ويكون $B \subseteq N \cap U \subseteq U$ ومنه $B \subseteq U_0$ إذن $B \subseteq U_0 \cap (N \cap U)$ لأن B بسيط فهو مخالف للصفر مما ينافي كون $U = U_0 \oplus (N \cap U)$. إذن هذه الحالة مرفوضة، والحالة المقبولة هي فقط $N \cap U = 0$ ويكون $U = U_0$ وهو مجموع مودولات بسيطة.

إذا أجاب الطالب بأية طريقة أخرى تعطى له الدرجات بما يتناسب مع هذا الحل